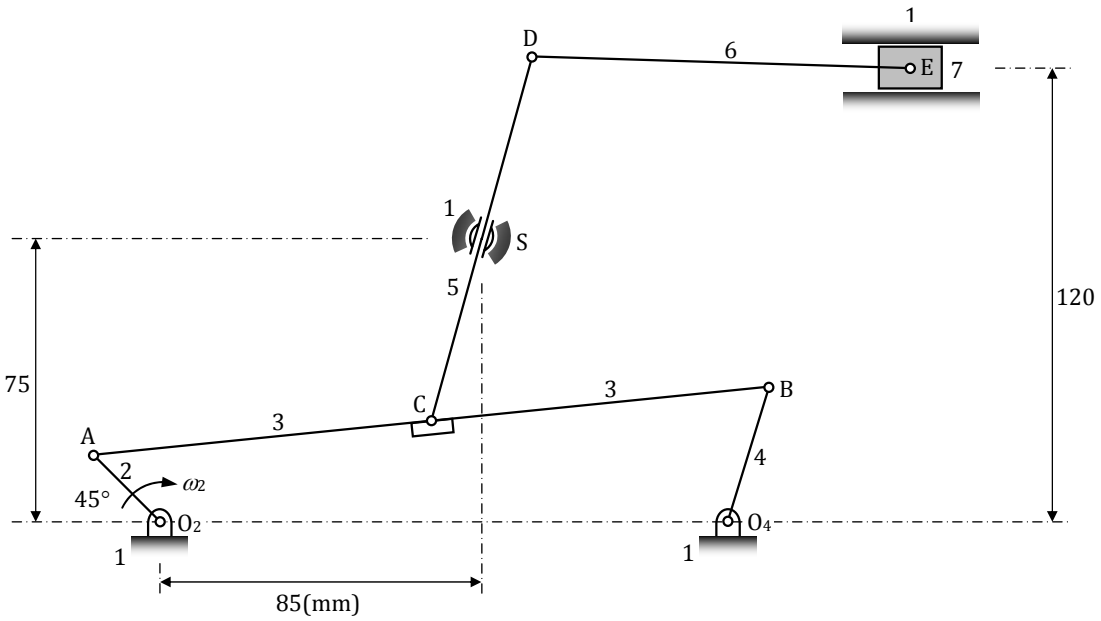
(۱) در مکانیزم شکل زیر، عضو ۲ با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_2=۳۰(rad/s) در جهت ساعت‌گرد دوران می‌کند. سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای عضوهای ۳، ۴، ۵ و ۶ و سرعت خطی و شتاب خطی نقطه‌ی E را برای لحظه‌ی نشان داده شده در شکل محاسبه کنید. هم‌چنین سرعت و شتاب لغزشی عضو ۵ را نسبت به هادی S برای این لحظه به‌دست آورید. توجه شود که میله‌ی ACB یک عضو یک‌پارچه است. (مکانیزم با مقیاس ۱:۲ رسم شده است).

O_2A=25(mm)، O_2O_4=150(mm)، AC=CB=90(mm)، CS=SD=50(mm)، DE=100(mm).



شکل (۱): شکل مکانیزم که با مقیاس شکل ۱:۲ رسم شده است.

پاسخ:

ابتدا بخش سرعت مسأله حل می‌شود. برای این منظور لازم است ابتدا مکانیزم چهارمیله‌ای ۱، ۲، ۳ و ۴ تحلیل شود. این‌کار با رابطه‌ی سرعت نسبی بین نقطه‌های A و B انجام می‌شود. جزییات رابطه‌ی سرعت (۱) در جدول (۱) نشان داده شده است. ترسیمه‌ی سرعت در شکل (۲) رسم شده است.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \qquad (۱)$$

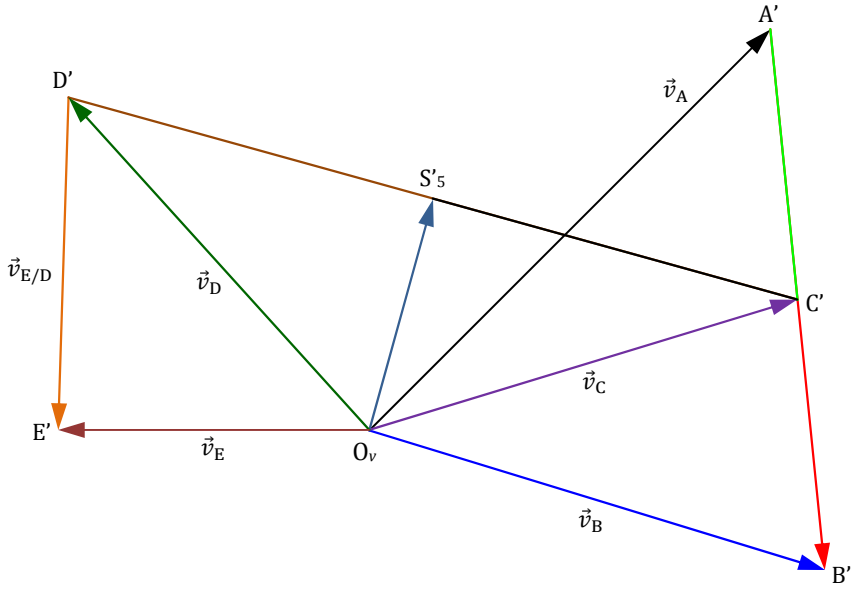
جدول(۱): جزییات رابطه‌ی سرعت (۱)

نام بردار	مشخصات بردار			
	راستا		اندازه	
	شرح	وضعیت	شرح	وضعیت
$\vec{v}_B$	عمود بر O_4B	☑	$O_4B \times \omega_4$	؟
$\vec{v}_A$	عمود بر O_2A	☑	$O_2A \times \omega_2 = 750$ (mm/s)	☑
$\vec{v}_{B/A}$	عمود بر AB	☑	$AB \times \omega_3$	؟

با استفاده از ترسیمه‌ی رسم شده برای سرعت در شکل (۲)، مجهول‌های رابطه‌ی (۱) مطابق رابطه‌ی (۲) به‌دست می‌آید.

$$|\vec{v}_B| = 631 \text{ (mm/s)} \quad \therefore \quad \omega_4 = 16.8 \text{ (rad/s)} \circlearrowright$$
$$|\vec{v}_{B/A}| = 719 \text{ (mm/s)} \quad \therefore \quad \omega_3 = 4 \text{ (rad/s)} \circlearrowright \qquad (۲)$$

در نتیجه‌ی رسم ترسیمه‌ی متناظر با رابطه‌ی (۱)، نقش سرعت عضو ۳ به‌دست می‌آید که در ترسیمه‌ی با پاره‌خط A'B' سرعت مشخص شده است. از آن‌جا که نقطه‌ی C وسط عضو ۳ است، سرعت نقطه‌ی C با استفاده از نقش سرعت عضو ۳ به‌دست می‌آید.



شکل (۲): ترسیمه‌ی سرعت مکانیزم شکل (۱).

مقیاس ترسیمه‌ی سرعت: هر (cm)۱ در ترسیمه ی سرعت معادل (mm/s)۱۰۰ است.

اکنون می‌توان با استفاده از سرعت نقطه‌ی C و هم‌چنین هادی S، سرعت زاویه‌ای عضو ۵ را محاسبه نمود. نقطه‌ای از عضو ۵ که بر نقطه‌ی S منطبق است را S_5 می‌نامیم. سرعت نقطه‌ی S_1 که متعلق به زمین و ثابت است، با استفاده از حرکت نسبی آن نسبت به عضو ۵ بر اساس رابطه‌ی (۳) بیان می‌شود.

$$\begin{matrix}\vec{v}_{S_1} = \vec{v}_{S_5} + \vec{v}_{rel} \\ \vec{v}_{S_1} = \vec{0}\end{matrix} \quad \therefore \quad \vec{v}_{S_5} = -\vec{v}_{rel} \qquad (۳)$$

با توجه به این‌که بردار $\vec{v}_{rel}$ (سرعت نقطه‌ی S_1 نسبت به عضو ۵) در امتداد راستای CD است، از رابطه‌ی (۳) نتیجه می‌شود که راستای سرعت نقطه‌ی S_5 نیز در امتداد راستای CD است. اکنون برای تحلیل سرعت عضو ۵ می‌توان از رابطه‌ی سرعت نسبی بین نقطه‌های S_5 و C، مطابق رابطه‌ی (۴)، استفاده نمود. جزییات رابطه‌ی (۴) در جدول (۲) نشان داده شده و ترسیمه‌ی آن در شکل (۲) رسم شده است.

$$\vec{v}_{S_5} = \vec{v}_C + \vec{v}_{S_5/C} \qquad (۴)$$

جدول(۲): جزییات رابطه‌ی سرعت (۴)

نام بردار	مشخصات بردار			
	راستا		اندازه	
	شرح	وضعیت	شرح	وضعیت
$\vec{v}_{S_5}$	در امتداد CD	☑	v_{S_5}	؟
$\vec{v}_C$	در ترسیمه‌ی سرعت مشخص شده است	☑	592 (mm/s)	☑
$\vec{v}_{S_5/C}$	عمود بر CD	☑	$CS_5 \times \omega_5$	؟

با استفاده از ترسیمه‌ی سرعت، مجهول‌های رابطه‌ی سرعت (۴) مطابق رابطه‌های (۵) به‌دست می‌آیند. توجه شود که $\vec{v}_{S_5}$ در رابطه‌ی (۳)، همان سرعت عضو ۵ نسبت به هادی S است.

$$\begin{matrix}|\vec{v}_{S_5}| = 316\ (mm/s) \\ |\vec{v}_{S_5/C}| = 500\ (mm/s)\end{matrix} \quad \therefore \quad \begin{matrix}|\vec{v}_{rel}| = 316\ (mm/s) \\ \omega_5 = 10\ (rad/s)\ \circlearrowleft\end{matrix} \qquad (۵)$$

با به‌دست آمدن بردار سرعت نقطه‌ی S_5، $\vec{v}_{S_5}$، با توجه به این‌که S_5 وسط CD است، نتیجه می‌شود $\vec{v}_{D/C}$ دوبرابر بردار $\vec{v}_{S_5/C}$ است. در نتیجه نقش سرعت عضو ۵ به‌صورت پاره‌خط C'D' در ترسیمه‌ی سرعت به‌دست می‌آید. به‌گونه‌ای که در این شکل C'D' دوبرابر $C'S'_5$ است.

در نهایت با استفاده از سرعت نسبی بین نقطه‌های E و D، سرعت خطی لغزنده‌ی ۷ و سرعت زاویه‌ای عضو ۶ به‌دست می‌آید و تحلیل سرعت مکانیزم کامل می‌شود. جزییات رابطه‌ی سرعت (۶) در جدول (۳) نشان داده شده است.

$$\vec{v}_E = \vec{v}_D + \vec{v}_{E/D} \qquad (۶)$$

جدول(۳): جزییات رابطه‌ی سرعت (۶)

نام بردار	مشخصات بردار			
	راستا		اندازه	
	شرح	وضعیت	شرح	وضعیت
$\vec{v}_{\mathrm{E}}$	در امتداد افقی	☑	v_{E}	؟
$\vec{v}_{\mathrm{D}}$	در ترسیمه‌ی سرعت مشخص شده است	☑	592 (mm/s)	☑
$\vec{v}_{\mathrm{E/D}}$	عمود بر DE	☑	$\mathrm{DE} \times \omega_6$	؟

با استفاده از ترسیمه‌ی سرعت، مجهول‌های رابطه‌ی سرعت (۶) مطابق رابطه‌های (۷) به‌دست می‌آیند.

$$|\vec{v}_{\mathrm{E}}| = 411\ (\mathrm{mm/s})$$
$$\left|\vec{v}_{\mathrm{E/D}}\right| = 440\ (\mathrm{mm/s}) \qquad \therefore \qquad \omega_6 = 4.4\ (\mathrm{rad/s})\ \circlearrowright \tag{۷}$$

برای تحلیل شتاب مکانیزم، همانند بخش سرعت، ابتدا با به‌کارگیری رابطه‌ی شتاب نسبی بین نقطه‌های A و B، تحلیل شتاب مکانیزم چهارمیله‌ای ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌شود. توجه شود چون ω_2 ثابت است، مؤلفه‌ی مماسی شتاب نقطه‌ی A، $(\vec{a}_{\mathrm{A}})_t$، صفر است.

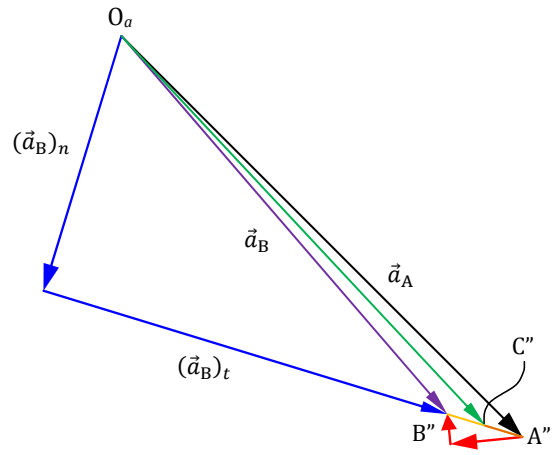
$$(\vec{a}_{\mathrm{B}})_n + (\vec{a}_{\mathrm{B}})_t = (\vec{a}_{\mathrm{A}})_n + \left(\vec{a}_{\mathrm{B/A}}\right)_n + \left(\vec{a}_{\mathrm{B/A}}\right)_t \tag{۸}$$

جدول(۴): جزییات رابطه‌ی شتاب (۸)

نام بردار	مشخصات بردار			
	راستا		اندازه	
	شرح	وضعیت	شرح	وضعیت
$(\vec{a}_{\mathrm{B}})_n$	به‌موازات $\overrightarrow{\mathrm{BO_4}}$	☑	$\mathrm{O_4B} \times (\omega_4)^2 = 10.6\ (\mathrm{m/s^2})$	☑
$(\vec{a}_{\mathrm{B}})_t$	عمود بر $\mathrm{O_4B}$	☑	$\mathrm{O_4B} \times \alpha_4$	؟
$(\vec{a}_{\mathrm{A}})_n$	به‌موازات $\overrightarrow{\mathrm{AO_2}}$	☑	$\mathrm{O_2A} \times (\omega_2)^2 = 22.5\ (\mathrm{m/s^2})$	☑
$\left(\vec{a}_{\mathrm{B/A}}\right)_n$	به‌موازات $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$	☑	$\mathrm{AB} \times (\omega_3)^2 = 2.9\ (\mathrm{m/s^2})$	☑
$\left(\vec{a}_{\mathrm{B/A}}\right)_t$	عمود بر AB	☑	$\mathrm{AB} \times \alpha_4$	؟

با استفاده از ترسیمه‌ی شتاب رابطه‌ی (۸) که در شکل (۳) رسم شده، مجهول‌های رابطه‌ی شتاب (۸) مطابق رابطه‌های (۹) به‌دست می‌آیند.

$$\left|\left(\vec{a}_{\mathrm{B/A}}\right)_t\right| = 1.1\ (\mathrm{m/s^2}) \qquad \therefore \qquad \alpha_3 = 6.2\ (\mathrm{rad/s^2})\ \circlearrowleft$$
$$|(\vec{a}_{\mathrm{B}})_t| = 16.8\ (\mathrm{m/s^2}) \qquad \therefore \qquad \alpha_4 = 448.6\ (\mathrm{rad/s^2})\ \circlearrowright \tag{۹}$$



شکل (۳): ترسیمه‌ی شتاب رابطه‌ی (۸).

مقیاس ترسیمه: هر ۱(cm) در ترسیمه معادل ۳($\mathrm{m/s^2}$) است.

پاره‌خط A"B" در ترسیمه‌ی شتاب شکل (۳)، تقش شتاب عضو ۳ است. نقطه‌ی C" در شکل ۳ وسط پاره‌خط A"B" است. در نتیجه برداری که از مبدأ ترسیمه‌ی شتاب در شکل (۳) به نقطه‌ی C" وصل شده است، بردار شتاب نقطه‌ی C" از عضو ۳، $\vec{a}_C$، است.

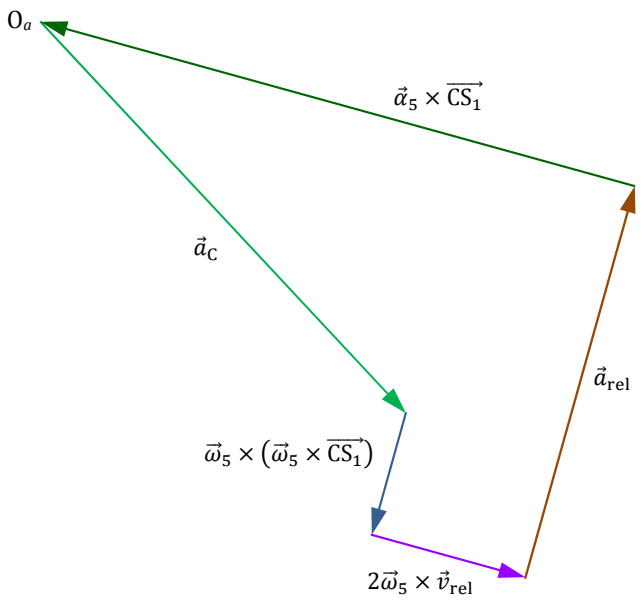
اکنون با استفاده از $\vec{a}_C$ و بررسی شتاب نقطه‌ی S_1 نسبت به چارچوب عضو ۵، تحلیل شتاب عضو ۵ مطابق رابطه‌ی (۱۰) انجام می‌شود. توجه شود که نقطه‌ی S_1 متعلق به زمین و ثابت است. در نتیجه شتاب آن برابر صفر است ($\vec{a}_{S_1} = \vec{0}$).

$$\vec{a}_{S_1} = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_5 \times \overrightarrow{CS_1} + \vec{\omega}_5 \times \left(\vec{\omega}_5 \times \overrightarrow{CS_1}\right) + 2\vec{\omega}_5 \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel} \qquad (۱۰)$$

لازم به یادآوری است که بردار $\vec{v}_{rel}$ در رابطه‌ی (۱۰)، بر اساس رابطه‌ی (۳)، قرینه‌ی بردار $\vec{v}_{S_5}$ است. جزییات رابطه‌ی شتاب (۱۰) در جدول (۵) نشان داده شده است. ترسیمه‌ی رابطه‌ی شتاب (۱۰) در شکل (۴) رسم شده است.

جدول(۵): جزییات رابطه‌ی شتاب (۱۰)

نام بردار	مشخصات بردار			
	راستا		اندازه	
	شرح	وضعیت	شرح	وضعیت
$\vec{a}_{S_5}$	–	☑	(صفر است)	☑
$\vec{a}_C$	در شکل (۳) مشخص شده است.	☑	$21.2\ (m/s^2)$	☑
$\vec{\alpha}_5 \times \overrightarrow{CS_1}$	عمود بر CD	☑	$CS_1 \times \alpha_5$	؟
$\vec{\omega}_5 \times \left(\vec{\omega}_5 \times \overrightarrow{CS_1}\right)$	به‌موازات $\overrightarrow{S_1C}$	☑	$S_1C \times (\omega_5)^2 = 5\ (m/s^2)$	☑
$2\vec{\omega}_5 \times \vec{v}_{rel}$	عمود بر CD	☑	$2(\omega_5)(v_{rel}) = 6.3\ (m/s^2)$	☑
$\vec{a}_{rel}$	در امتداد CD	☑	a_{rel}	؟



شکل (۴): ترسیمه‌ی شتاب رابطه‌ی (۱۰).

مقیاس ترسیمه: هر ۱(cm) در این ترسیمه معادل ۳(m/s²) است.

با استفاده از ترسیمه‌ی شتاب رابطه‌ی (۱۰) که در شکل (۴) رسم شده، مجهول‌های رابطه‌ی شتاب (۱۰) مطابق رابطه‌های (۱۱) به‌دست می‌آیند. توجه شود که $|\vec{a}_{rel}|$ همان اندازه‌ی شتاب عضو ۵ نسبه به هادی S است.

$$\left|\vec{\alpha}_5 \times \overrightarrow{CS_1}\right| = 24.4\ (m/s^2) \quad \therefore \quad \alpha_5 = 488.7\ (rad/s^2)\ \circlearrowleft$$
$$|\vec{a}_{rel}| = 16.1\ (m/s^2) \qquad (۱۱)$$

پس از به‌دست آمدن شتاب زاویه‌ای عضو ۵، α_5، و با استفاده از رابطه‌ی شتاب نسبی بین نقطه‌های C و D از عضو ۵، مطابق رابطه‌ی (۱۲)، شتاب نقطه‌ی D محاسبه خواهد شد.

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \left(\vec{a}_{D/C}\right)_n + \left(\vec{a}_{D/C}\right)_t \qquad (۱۲)$$

جزییات رابطه‌ی شتاب (۱۲) در جدول (۶) نمایش داده شده است. ترسیمه‌ی رابطه‌ی (۱۲) در شکل (۵) رسم شده است.

جدول(۶): جزییات رابطه‌ی شتاب (۱۲)

نام بردار	مشخصات بردار			
	راستا		اندازه	
	شرح	وضعیت	شرح	وضعیت
$\vec{a}_{\mathrm{D}}$	(مجهول)	؟	(مجهول)	؟
$\vec{a}_{\mathrm{C}}$	در شکل (۳) و (۴) مشخص شده است.	☑	$21.2\ (\mathrm{m/s^2})$	☑
$(\vec{a}_{\mathrm{D/C}})_n$	به‌موازات $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$	☑	$\mathrm{CD}\times(\omega_5)^2 = 10\ (\mathrm{m/s^2})$	☑
$(\vec{a}_{\mathrm{D/C}})_t$	عمود بر CD، با توجه به جهت α_5	☑	$\mathrm{CD}\times\alpha_5 = 48.9\ (\mathrm{m/s^2})$	☑

اکنون پس از به‌دست آمدن نقطه‌ی D، با استفاده از رابطه‌ی شتاب نسبی بین نقطه‌های D و E از عضو ۶، مطابق رابطه‌ی (۱۳)، شتاب زاویه‌ای عضو ۶، α_6، و شتاب خطی نقطه‌ی E که همان شتاب لغزنده‌ی ۷ است، محاسبه خواهد شد. جزییات رابطه‌ی (۱۳) در جدول (۷) نمایش داده شده و ترسیمه‌ی آن در شکل (۵) رسم شده است.

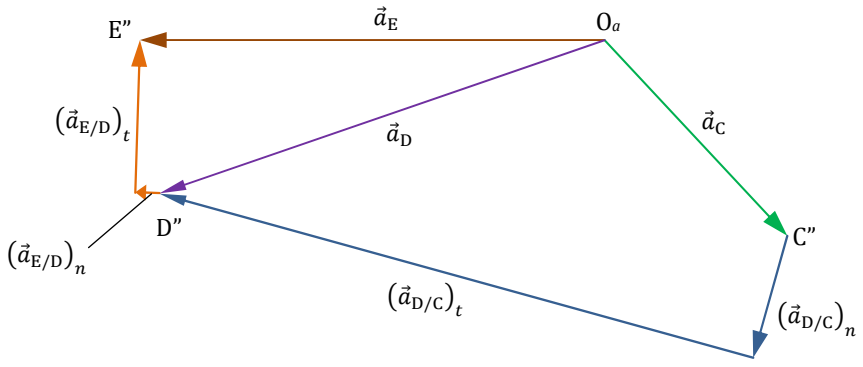
$$\vec{a}_{\mathrm{E}} = \vec{a}_{\mathrm{D}} + (\vec{a}_{\mathrm{E/D}})_n + (\vec{a}_{\mathrm{E/D}})_t \qquad (۱۳)$$

جدول(۷): جزییات رابطه‌ی شتاب (۱۳)

نام بردار	مشخصات بردار			
	راستا		اندازه	
	شرح	وضعیت	شرح	وضعیت
$\vec{a}_{\mathrm{E}}$	افقی	☑	a_{E}	؟
$\vec{a}_{\mathrm{D}}$	در شکل (۵) مشخص شده است.	☑	$37.4\ (\mathrm{m/s^2})$	☑
$(\vec{a}_{\mathrm{E/D}})_n$	به‌موازات $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$	☑	$\mathrm{DE}\times(\omega_6)^2 = 1.9\ (\mathrm{m/s^2})$	☑
$(\vec{a}_{\mathrm{E/D}})_t$	عمود بر DE	☑	$\mathrm{DE}\times\alpha_6$	؟

با استفاده از اطلاعات ترسیمه‌ی رابطه‌ی برداری (۱۳) که در شکل (۵) رسم شده، مجهول‌های رابطه‌ی (۱۳) به‌صورت رابطه‌ی (۱۴) به‌دست می‌آیند.

$$\left|(\vec{a}_{\mathrm{D/E}})_t\right| = 12.1\ (\mathrm{m/s^2}) \quad \therefore \quad \alpha_6 = 121.2\ (\mathrm{rad/s^2})\ \circlearrowleft$$
$$|\vec{a}_{\mathrm{E}}| = 36.8\ (\mathrm{m/s^2})\ \leftarrow \qquad (۱۴)$$



شکل (۵): ترسیمه‌ی شتاب رابطه‌ی (۱۲) و (۱۳).

مقیاس ترسیمه: هر ۱(cm) در ترسیمه معادل ۶(m/s²) است.