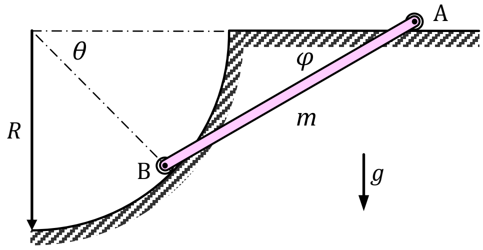
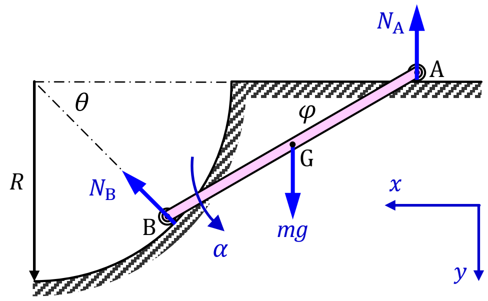


میله‌ی باریک و یکنواخت AB به‌جرم m از حالت سکون در وضعیتی که θ=45° و φ=30° است، رها می‌شود. حرکت دو سر A و B از میله روی سطح تخت و سطح دایره‌ای به‌شعاع R، بدون اصطکاک فرض می‌شود و مسأله در صفحه‌ی قائم است. شتاب زاویه‌ای میله (α_{AB}) و شتاب نقطه‌ی B (a_B) را در لحظه‌ی اول محاسبه کنید. (گشتاور اینرسی جرمی میله‌ی باریک و یکنواخت به‌طول l و جرم m حول مرکز جرم آن $I_G=ml^2/12$ است)

حل:

سیستم: میله.



نمودار جسم آزاد میله به‌همراه دستگاه مختصات دکارتی که برای حل مسأله به‌کار برده خواهد شد، در شکل روبرو نشان داده شده است. معادلات حرکت میله در دستگاه مختصات دکارتی نشان داده شده، به‌صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{cases}\Sigma\vec{F}=m\,\vec{a_G}\\ \Sigma M_G=I_G\,\alpha\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\Sigma F_x=m(a_G)_x\\ \Sigma F_y=m(a_G)_y\\ \Sigma M_G=I_G\,\alpha\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}N_B=m(a_G)_x\\ mg-N_A-\dfrac{\sqrt{2}}{2}N_B=m(a_G)_y\\ \left(\dfrac{l}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)N_A-\left(\dfrac{l}{2}\times\cos 15^\circ\right)N_B=\dfrac{1}{12}ml^2\alpha\end{cases}$$

دستگاه بالا شامل سه معادله و پنج مجهول N_A، N_B، $(a_G)_x$، $(a_G)_y$ و α است.

برای تکمیل دستگاه باید از اطلاعات سینماتیک استفاده کرد. با توجه به این‌که مسأله در لحظه‌ی نخست حل می‌شود، سرعت زاویه‌ای میله در لحظه‌ی اول صفر است. همچنین مؤلفه‌ی عمود بر مسیر شتاب نقطه‌ی B نیز در لحظه‌ی اول صفر است.

$$\vec{a_A}=a_A\hat{\imath}$$

$$\vec{a_B}=(\vec{a_B})_n+(\vec{a_B})_t=\vec{0}+(\vec{a_B})_t=a_B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\imath}+\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\jmath}\right)$$

$$\vec{a_B}=\vec{a_A}+\left(\vec{a_{B/A}}\right)_n+\left(\vec{a_{B/A}}\right)_t\quad\rightarrow\quad a_B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\imath}+\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\jmath}\right)=a_A\hat{\imath}+\vec{0}+l\alpha\left(-\frac{1}{2}\hat{\imath}+\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}\right)$$

$$\rightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}a_B=a_A-\dfrac{1}{2}l\alpha\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}a_B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}l\alpha\end{cases}\rightarrow\quad\begin{cases}a_B=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}l\alpha=1.2247l\alpha\\ a_A=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)l\alpha=1.3660l\alpha\end{cases}$$

$$\vec{a_G}=\vec{a_A}+\left(\vec{a_{G/A}}\right)_n+\left(\vec{a_{G/A}}\right)_t=1.3660l\alpha\hat{\imath}+\vec{0}+\frac{l}{2}\alpha\left(-\frac{1}{2}\hat{\imath}+\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}\right)\quad\rightarrow\quad\begin{cases}(a_G)_x=1.1160l\alpha\\ (a_G)_y=0.4330l\alpha\end{cases}$$

اکنون با جایگذاری $(a_G)_x$ و $(a_G)_y$ بر حسب α در دستگاه معادلات حرکت، دستگاه شامل سه معادله و سه مجهول خواهد شد.

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} N_{\mathrm{B}} = 1.1160(ml\alpha) \\ mg - N_{\mathrm{A}} - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{\mathrm{B}} = 0.4330(ml\alpha) \\ 1.7321 N_{\mathrm{A}} - 1.9319 N_{\mathrm{B}} = \frac{1}{3}(ml\alpha) \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \alpha = 0.2856\left(\frac{g}{l}\right) \quad \rightarrow \quad a_{\mathrm{B}} = 0.3497\, g$$