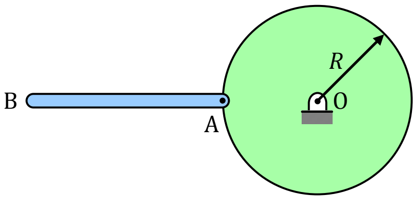
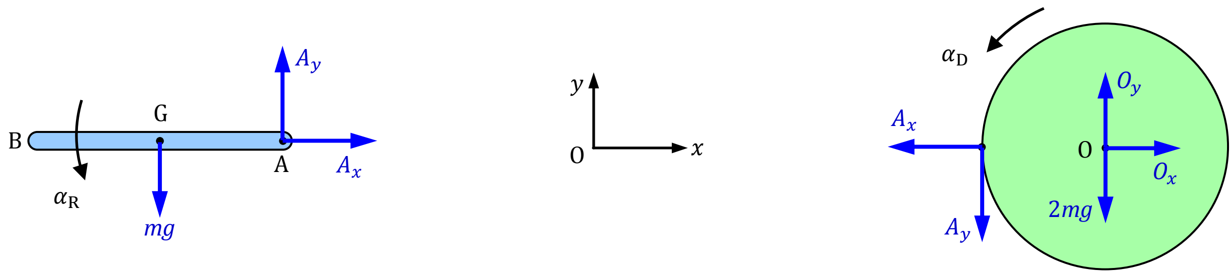
صفحه‌ی دایره‌ای همگن به‌شعاع R و به‌جرم $2m$ در مرکز آن به‌نقطه‌ی ثابت O لولا شده است. میله‌ی یکنواخت AB به‌طول $2R$ و جرم m در نقطه‌ی A از محیط صفحه‌ی دایره‌ای، به صفحه‌ی دایره‌ای لولا شده است. مجموعه از حالت سکون در وضعیتی که OAB افقی است، رها می‌شود. شتاب زاویه‌ای اولیه‌ی صفحه‌ی دایره‌ای و میله را محاسبه کنید.





حل:

سیستم: صفحه‌ی دایره‌ای و میله به‌صورت جداگانه.

نمودار جسم آزاد هر یک از دو سیستم به‌همراه یک دستگاه مختصات دکارتی که برای حل مسأله به‌کار برده خواهد شد، در شکل بالا نشان داده شده است. توجه شود که نقطه‌ی O مرکز جرم صفحه‌ی دایره‌ای است و G مرکز جرم میله. معادلات حرکت برای هریک از دو سیستم در دستگاه مختصات دکارتی نشان داده شده، به‌صورت زیر نوشته می شود.

برای صفحه‌ی دایره‌ای:

$$\begin{cases}\Sigma\vec{F}=m\,\overrightarrow{a_{\mathrm{O}}}=\vec{0}\\ \Sigma M_{\mathrm{O}}=I_{\mathrm{O}}^{\mathrm{Disk}}\,\alpha_{\mathrm{D}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\\ \Sigma M_{\mathrm{O}}=I_{\mathrm{O}}^{\mathrm{Disk}}\,\alpha_{\mathrm{D}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}O_x-A_x=0\\ O_y-A_y-2mg=0\\ RA_y=\dfrac{1}{2}(2m)R^2\,\alpha_{\mathrm{D}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}O_x=A_x\\ O_y-A_y=2mg\\ A_y=mR\,\alpha_{\mathrm{D}}\end{cases}$$

برای میله:

$$\begin{cases}\Sigma\vec{F}=m\,\overrightarrow{a_{\mathrm{G}}}\\ \Sigma M_{\mathrm{G}}=I_{\mathrm{G}}^{\mathrm{Rod}}\,\alpha_{\mathrm{R}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\Sigma F_x=m(a_{\mathrm{G}})_x\\ \Sigma F_y=m(a_{\mathrm{G}})_y\\ \Sigma M_{\mathrm{G}}=I_{\mathrm{G}}^{\mathrm{Rod}}\,\alpha_{\mathrm{R}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A_x=m(a_{\mathrm{G}})_x\\ A_y-mg=m(a_{\mathrm{G}})_y\\ RA_y=\dfrac{1}{12}m(2R)^2\,\alpha_{\mathrm{R}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A_x=m(a_{\mathrm{G}})_x\\ A_y-mg=m(a_{\mathrm{G}})_y\\ A_y=\dfrac{mR}{3}\,\alpha_{\mathrm{R}}\end{cases}$$

دو دستگاه بالا شامل شش معادله و هشت مجهول O_x، O_y، A_x، A_y، α_{D}، $(a_{\mathrm{G}})_x$، $(a_{\mathrm{G}})_y$ و α_{R} می‌شود. برای کامل شدن معادله‌ها باید از روابط سینماتیک استفاده شود. با استفاده از شتاب نسبی A نسبت به O و سپس شتاب نسبی G نسبت به A و با توجه به این‌که در لحظه‌ی نخست سرعت زاویه‌ای صفحه‌ی دایره‌ای و میله هر دو برابر صفر است ($\omega_{\mathrm{R}}=\omega_{\mathrm{D}}=0$) نتیجه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$\overrightarrow{a_{\mathrm{A}}}=\overrightarrow{a_{\mathrm{O}}}+\left(\overrightarrow{a_{\mathrm{A/O}}}\right)_n+\left(\overrightarrow{a_{\mathrm{A/O}}}\right)_t=\vec{0}+\vec{0}-R\,\alpha_{\mathrm{D}}\,\hat{\jmath}\quad\rightarrow\quad\overrightarrow{a_{\mathrm{A}}}=-R\,\alpha_{\mathrm{D}}\,\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{a_{\mathrm{G}}}=\overrightarrow{a_{\mathrm{A}}}+\left(\overrightarrow{a_{\mathrm{G/A}}}\right)_n+\left(\overrightarrow{a_{\mathrm{G/A}}}\right)_t=-R\,\alpha_{\mathrm{D}}\,\hat{\jmath}+\vec{0}-R\,\alpha_{\mathrm{R}}\,\hat{\jmath}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}(a_{\mathrm{G}})_x=0\\ (a_{\mathrm{G}})_y=-R\,(\alpha_{\mathrm{D}}+\alpha_{\mathrm{R}})\end{cases}$$

با استفاده از دو نتیجه‌ی آخر برای $(a_{\mathrm{G}})_x$ و $(a_{\mathrm{G}})_y$، معادلات حرکت میله، به‌صورت زیر ساده می‌شود.

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y - mg = -mR\,(\alpha_{\mathrm{D}} + \alpha_{\mathrm{R}}) \\ A_y = \dfrac{mR}{3}\,\alpha_{\mathrm{R}} \end{cases}$$

این معادله‌ها در کنار معادله‌های حرکت مربوط به صفحه‌ی دایره‌ای شش مجهول O_x، O_y، A_x، A_y، α_{D} و α_{R} را در بر دارند که از حل آن‌ها شتاب‌های زاویه‌ای به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\alpha_{\mathrm{D}} = \frac{1}{5}\frac{g}{R} \qquad , \qquad \alpha_{\mathrm{R}} = \frac{3}{5}\frac{g}{R}$$