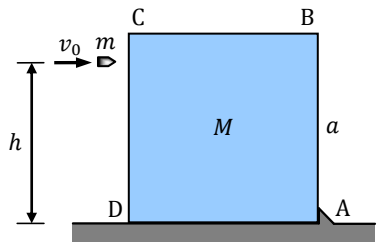


صفحه‌ی مربعی یکنواخت به‌طول ضلع a و جرم M روی سطح افقی در حالت سکون قرار دارد. گلوله‌ای به‌جرم m با سرعت v_0 در ارتفاع h $(h < a)$ به ضلع CD از این صفحه برخورد می‌کند و در فاصله‌ی زمانی بسیار کوتاهی در آن متوقف می‌شود. در اثر این برخورد، صفحه حول مانع بسیار کوچکی که در برابر گوشه‌ی A قرار دارد، شروع به دوران می‌کند. کمترین اندازه‌ی سرعت v_0 گلوله چقدر باشد تا صفحه به‌طور کامل حول گوشه‌ی A دوران کند

حل:

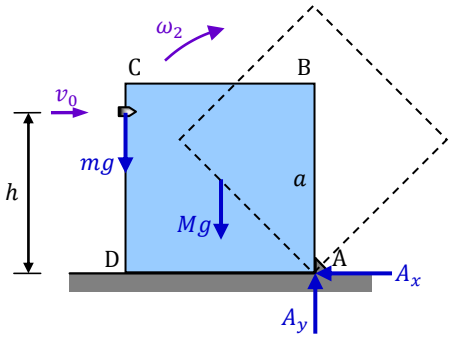
سیستم: مجموعه‌ی صفحه و گلوله

وضعیت (۱): یک لحظه پیش از برخورد گلوله

وضعیت (۲): لحظه‌ی پس از برخورد گلوله

وضعیت (۳): لحظه‌ای که قطر از صفحه‌ی مربعی در حالت قائم قرار گرفته است

نمودار جسم آزاد مجموعه در شکل روبرو نشان داده شده است.



با چشم‌پوشی از ضربه‌ی زاویه‌ای گشتاور وزن حول نقطه‌ی A، بین وضعیت (۱) و (۲)، بقای تکانه‌ی زاویه‌ای حول نقطه‌ی A برای مجموعه برقرار است.

با صرفنظر کردن از جرم گلوله در برابر جرم صفحه، رابطه‌ی بقای تکانه‌ی زاویه‌ای به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_{\mathrm{A}}\, dt \cong 0 \quad \rightarrow \quad (\Delta H_{\mathrm{A}})_{1-2} = 0 \quad \rightarrow \quad (H_{\mathrm{A}})_1 = (H_{\mathrm{A}})_2$$

$$\begin{cases} (H_{\mathrm{A}})_1 = \left(H_{\mathrm{A}}^{\mathrm{Bullet}}\right)_1 = hmv_0 \\ (H_{\mathrm{A}})_2 = \left(H_{\mathrm{A}}^{\mathrm{Plate}}\right)_2 = I_{\mathrm{A}}\omega_2 = \left[I_{\mathrm{G}} + M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\right]\omega_2 = \left(\frac{1}{6}Ma^2 + \frac{1}{2}Ma^2\right)\omega_2 = \frac{2}{3}Ma^2\omega_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \frac{2}{3}Ma^2\omega_2 = hmv_0 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = \frac{3}{2}\left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{h}{a}\right)\left(\frac{v_0}{a}\right)$$

با استفاده از رابطه‌ی کار-انرژی بین وضعیت (۲) تا (۳)، کمترین سرعت v_0 گلوله به‌ازای صفر شدن سرعت زاویه‌ای صفحه در وضعیت (۳)، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. (باچشم‌پوشی از جرم گلوله در برابر جرم صفحه)

$$U'_{2-3} = (\Delta T)_{2-3} + \left(\Delta V_{\mathrm{g}}\right)_{2-3} + (\Delta V_{\mathrm{e}})_{2-3}$$

$U'_{2-3} = 0$ (کار نیروهای تکیه‌گاهی مربوط به مانع، برابر صفر است)

$(\Delta V_{\mathrm{e}})_{2-3} = 0$ (فنر یا جسم کشسانی در سیستم وجود ندارد)

$$\left(\Delta V_{\mathrm{g}}\right)_{2-3} = Mg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{1}{2}a\right) = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)Mga$$

$$(\Delta T)_{2-3} = T_3 - T_2 = 0 - T_2 = -\frac{1}{2}I_{\mathrm{A}}{\omega_2}^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}Ma^2\right){\omega_2}^2 = -\frac{1}{3}Ma^2{\omega_2}^2$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{3}Ma^2{\omega_2}^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)Mga \quad \rightarrow \quad {\omega_2}^2 = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{2}\left(\frac{g}{a}\right) = 0.62\left(\frac{g}{a}\right)$$

با جایگذاری نتیجه‌ی به‌دست آمده برای ω_2 در رابطه‌ی v_0 و ω_2 که از بقای تکانه‌ی زاویه‌ای به‌دست آمد، کمترین مقدار v_0 به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$v_0 = 0.53\left(\frac{M}{m}\right)\left(\frac{a}{h}\right)\sqrt{ga}$$