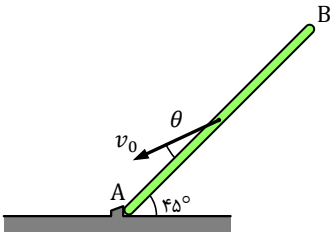


میله‌ی صلب و یکنواخت AB به‌طول l و جرم m، مطابق شکل روبرو، دارای حرکت انتقالی با سرعت v_0 است که ابتدای A از آن به مانعی روی سطح زمین برخورد می‌کند. راستای بردار سرعت میله با میله زاویه‌ی θ تشکیل می‌دهد و میله با زاویه‌ی ۴۵° به سطح زمین برخورد می‌کند. میله پس از برخورد با مانع، به‌صورت لولا حول آن دوران می‌کند. اگر $v_0 = \sqrt{gl}$ باشد، کمترین مقدار زاویه‌ی θ چه‌اندازه باشد تا میله به‌صورت کامل حول این مانع دوران کند؟

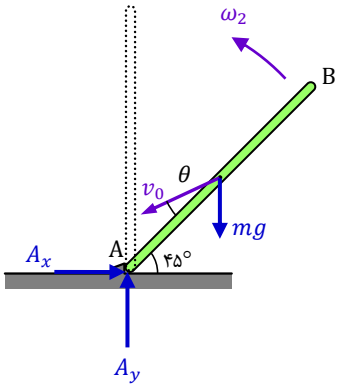
حل:

سیستم: میله‌ی AB

وضعیت (۱): یکلحظه پیش از برخورد به مانع

وضعیت (۲): یک لحظه پس از برخورد به مانع

وضعیت (۳): لحظه‌ای که میله به وضعیت ایستاده رسیده است



برای آن‌که میله بتواند به‌طور کامل حول مانع دوران کند، کافی است بتواند به وضعیت قائم که در شکل روبرو با خطچین نشان داده شده، برسد. بنابراین حداقل v_0 متناظر با شرایطی است که سرعت زاویه‌ای (و در نتیجه انرژی جنبشی میله) در وضعیت قائم (وضعیت (۳)) برابر صفر شود (ω_3=۰).

با توجه به نمودار جسم آزاد نشان داده شده در شکل بالا و با چشم‌پوشی از ضربه‌ی زاویه‌ای گشتاور وزن حول نقطه‌ی A، برای میله رابطه‌ی بقای تکانه‌ی زاویه‌ای حول نقطه‌ی A برقرار است.

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_A \, dt = 0 \quad \rightarrow \quad (\Delta H_A)_{1-2} = 0 \quad \rightarrow \quad (H_A)_1 = (H_A)_2$$

$$(H_A)_1 = I_G\omega_1 + m(v_G)_1 d = 0 + m(v_0 \sin\theta)\frac{l}{2} = \frac{1}{2}mlv_0 \sin\theta$$

$$(H_A)_2 = I_A\omega_2 = \left[\frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\omega_2 = \frac{1}{3}ml^2\omega_2$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2}mlv_0 \sin\theta = \frac{1}{3}ml^2\omega_2 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = \frac{3}{2}\left(\frac{v_0}{l}\right)\sin\theta = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\theta \quad (۱)$$

بین وضعیت (۲) تا (۳)، رابطه‌ی کار-انرژی برای میله به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$U'_{2-3} = (\Delta T)_{2-3} + (\Delta V_g)_{2-3} + (\Delta V_e)_{2-3}$$

$(\Delta V_e)_{2-3} = 0$ (جسم کشسان یا فنر در سیستم وجود ندارد)

$U'_{2-3} = 0$ (کار نیروی مانع در هنگام دوران میله برابر صفر است)

$$(\Delta V_g)_{2-3} = mg\left(\frac{l}{2}\right)(1 - \cos 45°) = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)mgl$$

$$(\Delta T)_{2-3} = T_3 - T_2 = 0 - T_2 = -\frac{1}{2}I_A\,{\omega_2}^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right){\omega_2}^2 = -\frac{1}{6}ml^2{\omega_2}^2$$

$$\frac{1}{6}ml^2{\omega_2}^2 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)mgl \quad \rightarrow \quad {\omega_2}^2 = \left(\frac{3(2-\sqrt{2})}{2}\right)\left(\frac{g}{l}\right) = 0.8787\left(\frac{g}{l}\right) \quad (۲)$$

از دو رابطه‌ی (۱) و (۲)، زاویه‌ی θ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\theta = \sqrt{\frac{3(2-\sqrt{2})}{2}}\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \rightarrow \quad \sin\theta = \sqrt{\frac{2(2-\sqrt{2})}{3}} \quad \rightarrow \quad \theta = 38.7^\circ$$