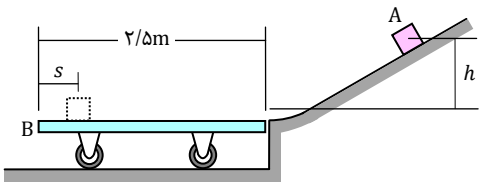
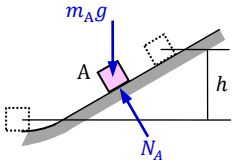


جعبه‌ی A به‌جرم m_A=۲۰(kg) از موقعیت نشان داده شده، از حالت سکون رها می‌شود و آزادانه روی سطح شیب‌دار صیقلی به پایین می‌لغزد. در پایین سطح شیب‌دار، جعبه‌ی A به‌صورت افقی به‌روی سطح گاری B به‌جرم m_B=۱۰(kg) می‌لغزد. ضریب اصطکاک جنبشی بین جعبه و گاری B برابر μ_k=۰/۶ و h=۰/۲(m) است.

الف- سرعت جعبه و گاری پس از توقف لغزش جعبه‌ی A روی گاریB.

ب- فاصله‌ی جعبه تا لبه‌ی گاری، s، پس از توقف لغزش جعبه‌ی A روی گاری B.

حل:



ابتدا سیستم مکانیکی جعبه‌ی A انتخاب و حرکت آن بین وضعیت (۱)؛ لحظه‌ی شروع حرکت از حالت سکون، و وضعیت (۲)؛ لحظه‌ی رسیدن به گاری، بررسی می‌شود. نمودار جسم آزاد جعبه‌ی A بین دو وضعیت (۱) و (۲) در شکل روبرو نشان داده شده است. رابطه‌ی کار-انرژی برای جعبه‌ی A بین دو وضعیت (۱) و (۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$U'_{1-2} = (\Delta T)_{1-2} + (\Delta V_g)_{1-2} + (\Delta V_e)_{1-2}$$

$(\Delta V_e)_{1-2} = 0$ (جسم کشسان یا فنر در سیستم وجود ندارد)

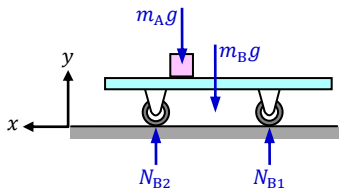
$U'_{1-2} = 0$ (نیروی اصطکاک وجود ندارد. کار نیروی عمود بر سطح نیز صفر است)

$$(\Delta V_g)_{1-2} = -m_A g h$$

$$(\Delta T)_{1-2} = T_2 - T_1 = T_2 = \frac{1}{2} m_A \, {v_{2A}}^2$$

با جایگذاری جمله‌ها در رابطه‌ی کار-انرژی، سرعت جعبه‌ی A در وضعیت (۲) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$v_{2A} = \sqrt{2gh}$$



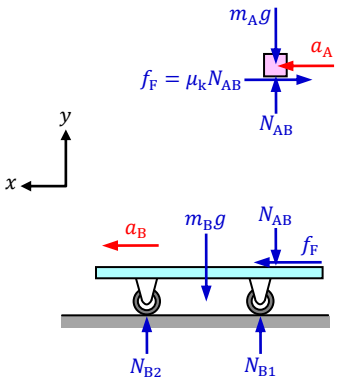
پس از تعیین سرعت جعبه‌ی A در لحظه‌ی ورود به گاری B، اکنون مجموعه‌ی جعبه‌ی A و گاری B به‌عنوان یک سیستم مکانیکی انتخاب و حرکت این سیستم بین وضعیت (۲)؛ لحظه‌ی ورود جعبه به گاری، و وضعیت (۳)؛ لحظه‌ی توقف لغزش جعبه روی گاری، بررسی می‌شود. نمودار جسم آزاد مجموعه بین دو وضعیت (۲) و (۳) در شکل روبرو نشان داده شده است. با توجه به این‌که در راستای x نیرویی به مجموعه وارد نمی‌شود، تکانه‌ی خطی مجموعه در راستای x بقا دارد. رابطه‌ی ضربه-تکانه‌ی خطی در راستای x برای مجموعه، بین دو وضعیت (۲) و (۳) به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\Sigma F_x = 0 \quad \rightarrow \quad (\Delta G_x)_{2-3} = 0 \quad \rightarrow \quad m_A (v_{2A})_x + m_B (v_{2B})_x = (m_A + m_B)(v_3)_x$$

در فاصله‌ی وضعیت (۲) تا (۳)، جعبه‌ی A و گاری B افقی حرکت می‌کنند و سرعت آن‌ها تنها مؤلفه‌ی x دارد. سرعت گاری B در وضعیت (۲) صفر است و در وضعیت (۳) نیز سرعت جعبه و گاری یکسان است که در رابطه‌ی بالا با $(v_3)_x$ نشان داده شده است. با جایگذاری سرعت جعبه‌ی A از عبارت $v_{2A} = \sqrt{2gh}$، سرعت $(v_3)_x$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$(v_3)_x = \left(\frac{m_A}{m_A + m_B}\right)\sqrt{2gh}$$

برای پاسخ به بخش (ب) مسأله، لازم است حرکت جعبه‌ی A و گاری B به‌صورت جداگانه بررسی شود. نمودار جسم آزاد جعبه‌ی A و گاری B به‌صورت جداگانه بین دو وضعیت (۲) و (۳) در شکل روبرو نشان داده شده است. شتاب جعبه و گاری بین دو وضعیت (۲) و (۳)، از نیروی اصطکاک f_F بین جعبه و گاری به‌وجود می‌آید.



با به‌کارگیری معادله‌ی، حرکت شتاب جعبه و گاری در فاصله‌ی بین وضعیت (۲) و (۳) محاسبه می‌شود. توجه شود که جعبه و گاری در راستای y حرکت نمی‌کنند. بنابراین همان‌گونه که در شکل روبرو نشان داده شده، شتاب جعبه و گاری در راستای x است.

$$\text{(A)}:\begin{cases}\Sigma F_x = m_A (a_A)_x = m_A a_A \\ \Sigma F_y = m_A (a_A)_y = 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}-\mu_k N_{AB} = m_A a_A \\ N_{AB} - m_A g = 0\end{cases} \rightarrow \quad a_A = -\mu_k\, g$$

$$\text{(B)}:\begin{cases}\Sigma F_x = m_B (a_B)_x = m_B a_B \\ \Sigma F_y = m_B (a_B)_y = 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\mu_k\, m_A g = m_B a_B \\ N_{B1} + N_{B2} = N_{AB} + m_B g\end{cases} \rightarrow \quad a_B = \mu_k \frac{m_A}{m_B} g$$

رابطه‌های بالا نشان می‌دهند که شتاب جعبه‌ی A در جهت منفی و شتاب گاری B در جهت مثبت محور x است. در فاصله‌ی بین وضعیت (۲) و (۳)، سرعت جعبه‌ی A از v_{2A} به $(v_3)_x$ که سرعت مشترک جعبه و گاری پس از توقف لغزش است، کاهش می‌یابد. در حالی که سرعت گاری B از صفر به $(v_3)_x$ افزایش می‌یابد. مدت زمان لغزش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$(\Delta t)_{2-3} = \frac{v_{3A} - v_{2A}}{a_A} = \frac{\left(\frac{m_A}{m_A+m_B}\right)\sqrt{2gh} - \sqrt{2gh}}{-\mu_k\, g} = \left(\frac{m_B}{m_A+m_B}\right) \times \frac{1}{\mu_k} \times \sqrt{2\frac{h}{g}}$$

برای محاسبه‌ی مسافت لغزش جعبه روی گاری، مسافتی که جعبه و گاری در مدت زمان $(\Delta t)_{2-3}$ به‌طور مطلق می‌پیمایند، به‌صورت جداگانه، محاسبه می‌شوند. اختلاف بین این دو مسافت، همان مسافت لغزش جعبه روی گاری خواهد بود.

$$(s_A)_{2-3} = \frac{{v_{3A}}^2 - {v_{2A}}^2}{2a_A} = \frac{\left(\frac{m_A}{m_A+m_B}\right)^2 (2gh) - (2gh)}{-2\,\mu_k\, g} = \frac{m_B(2m_A+m_B)}{(m_A+m_B)^2} \times \frac{1}{\mu_k} \times h$$

$$(s_B)_{2-3} = \frac{{v_{3B}}^2 - {v_{2B}}^2}{2a_A} = \frac{\left(\frac{m_A}{m_A+m_B}\right)^2 (2gh) - 0}{2\,\mu_k \frac{m_A}{m_B} g} = \frac{m_A m_B}{(m_A+m_B)^2} \times \frac{1}{\mu_k} \times h$$

در نتیجه مسافت لغزش جعبه روی گاری، $(s_{A/B})_{2-3}$، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$(s_{A/B})_{2-3} = (s_A)_{2-3} - (s_B)_{2-3} = \left(\frac{m_B}{m_A+m_B}\right) \times \frac{1}{\mu_k} \times h$$

در نهایت، فاصله‌ی جعبه تا لبه‌ی گاری، پس از توقف لغزش، برابر است با اختلاف مسافت لغزش ($(s_{A/B})_{2-3}$) با طول گاری که برابر $2/5\,(\mathrm{m})$ است.

$$s = 2.5 - (s_{A/B})_{2-3}$$