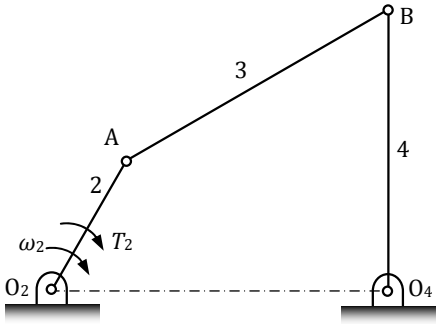
(۱) در مکانیزم شکل زیر که با مقیاس ۱:۵ رسم شده است، عضو ۲ با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega_2=10(\text{rad/s})$ در جهت نشان داده شده دوران می‌کند. در لحظه‌ی نشان داده شده، زاویه‌ی عضو ۲ با افق برابر 60° و زاویه‌ی عضو ۳ با افق برابر 30° و عضو ۴ قائم است. جرم میله‌های ۲ و ۴ به‌ترتیب $m_2=5(\text{kg})$ و $m_4=8(\text{kg})$ است و جرم میله‌ی ۳ ناچیز است. نیروی لولاهای O_2، A، B و O_4 و هم‌چنین کوپل T_2که باید روی عضو ۲ وارد شود تا شرایط سینماتیکی مکانیزم برآورده شود، محاسبه کنید. ($O_2A=10(\text{cm})$ ، $AB=20(\text{cm})$)



شکل (۱): شکل مکانیزم که با مقیاس شکل ۱:۵ رسم شده است.

پاسخ:

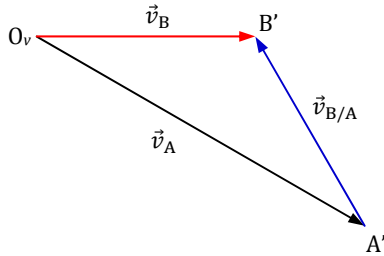
ابتدا بخش سرعت مسأله حل می‌شود. این‌کار با رابطه‌ی سرعت نسبی بین نقطه‌های A و B، مطابق رابطه‌ی (۱)، انجام می‌شود.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \qquad (۱)$$

جزییات رابطه‌ی سرعت (۱) در جدول (۱) نشان داده شده است. ترسیمه‌ی سرعت در شکل (۲) رسم شده است.

جدول(۱): جزییات رابطه‌ی سرعت (۱)

نام بردار	مشخصات بردار			
	راستا		اندازه	
	شرح	وضعیت	شرح	وضعیت
$\vec{v}_B$	عمود بر O_4B	☑	$O_4B \times \omega_4$	؟
$\vec{v}_A$	عمود بر O_2A	☑	$O_2A \times \omega_2 = 100\ (\text{cm/s})$	☑
$\vec{v}_{B/A}$	عمود بر AB	☑	$AB \times \omega_3$	؟



شکل (۲): ترسیمه‌ی سرعت مکانیزم شکل (۱). (مقیاس ترسیمه‌ی سرعت: هر ۱(cm) در ترسیمه ی سرعت معادل ۲۰(cm/s) است)

با استفاده از ترسیمه‌ی رسم شده برای سرعت در شکل (۲)، مجهول‌های رابطه‌ی (۱) مطابق رابطه‌ی (۲) به‌دست می‌آید. توجه شود که اندازه‌ی طول عضو ۴، با استفاده از اندازه‌گیری و هم‌چنین مقیاس ترسیمه‌ی مکانیزم، $O_4B=18/7(\text{cm})$ است.

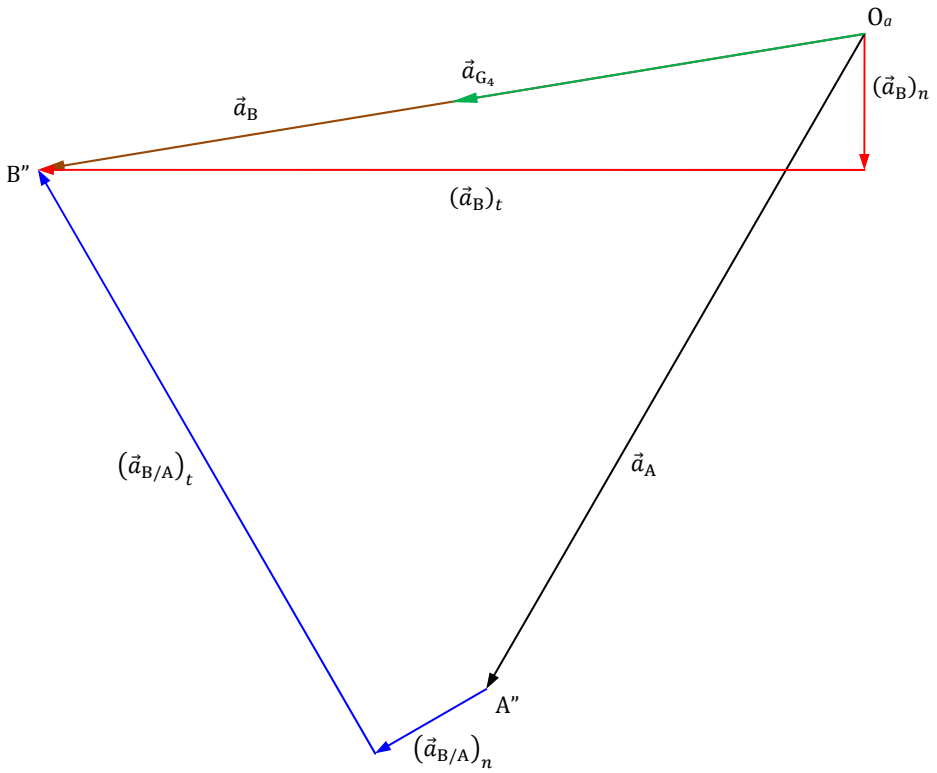
$$|\vec{v}_B| = 57.8\ (\text{cm/s}) \quad \therefore \quad \omega_4 = 3.1\ (\text{rad/s})\ \circlearrowright$$
$$|\vec{v}_{B/A}| = 57.8\ (\text{cm/s}) \quad \therefore \quad \omega_3 = 2.9\ (\text{rad/s})\ \circlearrowleft \qquad (۲)$$

اکنون با استفاده از سرعت زاویه‌ای‌های محاسبه شده می‌توان شتاب مکانیزم را بر اساس شتاب نسبی بین نقطه‌های A و B، مطابق رابطه‌ی (۳)، تحلیل نمود. جزییات رابطه‌ی (۳) در جدول (۲) آمده و ترسیمه‌ی رابطه‌ی (۳) در شکل (۳) رسم شده است.

$$(\vec{a}_{\mathrm{B}})_n + (\vec{a}_{\mathrm{B}})_t = (\vec{a}_{\mathrm{A}})_n + \left(\vec{a}_{\mathrm{B/A}}\right)_n + \left(\vec{a}_{\mathrm{B/A}}\right)_t \quad (۳)$$

جدول(۳): جزییات رابطه‌ی شتاب (۳)

نام بردار	مشخصات بردار: راستا – شرح	راستا – وضعیت	اندازه – شرح	اندازه – وضعیت
$(\vec{a}_{\mathrm{B}})_n$	به‌موازات $\overrightarrow{\mathrm{BO_4}}$	☑	$\mathrm{O_4B} \times (\omega_4)^2 = 1.8\ (\mathrm{m/s^2})$	☑
$(\vec{a}_{\mathrm{B}})_t$	عمود بر $\mathrm{O_4B}$	☑	$\mathrm{O_4B} \times \alpha_4$	؟
$(\vec{a}_{\mathrm{A}})_n$	به‌موازات $\overrightarrow{\mathrm{AO_2}}$	☑	$\mathrm{O_2A} \times (\omega_2)^2 = 10\ (\mathrm{m/s^2})$	☑
$\left(\vec{a}_{\mathrm{B/A}}\right)_n$	به‌موازات $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$	☑	$\mathrm{AB} \times (\omega_3)^2 = 1.7\ (\mathrm{m/s^2})$	☑
$\left(\vec{a}_{\mathrm{B/A}}\right)_t$	عمود بر AB	☑	$\mathrm{AB} \times \alpha_4$	؟



شکل (۳): ترسیمه‌ی شتاب رابطه‌ی (۳). (مقیاس ترسیمه: هر ۱(cm) در ترسیمه معادل ۱(m/s²) است)

با استفاده از ترسیمه‌ی شتاب شکل (۳)، مجهول‌های رابطه‌ی شتاب (۳) مطابق رابطه‌های (۴) به‌دست می‌آیند.

$$\left|\left(\vec{a}_{\mathrm{B/A}}\right)_t\right| = 8.9\ (\mathrm{m/s^2}) \quad \therefore \quad \alpha_3 = 45\ (\mathrm{rad/s^2})\ \circlearrowleft$$
$$|(\vec{a}_{\mathrm{B}})_t| = 10.9\ (\mathrm{m/s^2}) \quad \therefore \quad \alpha_4 = 58\ (\mathrm{rad/s^2})\ \circlearrowleft \quad (۴)$$

هم‌چنین با استفاده از ترسیمه‌ی شکل (۳)، شتاب مرکز جرم‌های عضوهای ۲ و ۴ مطابق رابطه‌ی (۵) به‌دست می‌آیند.

$$|(\vec{a}_{\mathrm{G}})_2| = 0.5|(\vec{a}_{\mathrm{A}})| = 5\ (\mathrm{m/s^2})$$
$$|(\vec{a}_{\mathrm{G}})_4| = 0.5|(\vec{a}_{\mathrm{B}})| = 5.5\ (\mathrm{m/s^2}) \quad (۵)$$

اکنون با کامل شدن تحلیل شتاب مکانیزم، می‌توان به تحلیل نیرویی مکانیزم پرداخت. ابتدا گشتاور اینرسی جرمی عضو ۴ محاسبه می‌شود. سپس نیروها و گشتاورهای اینرسی عضوهای دارای جرم محاسبه می‌شوند. آن‌گاه با بررسی تعادل مکانیزم، مجهول‌های نیرویی خواسته شده محاسبه می‌شوند.

با فرض آن‌که عضو ۴ یک میله‌ی یکنواخت باشد، گشتاور اینرسی جرمی آن بر اساس رابطه‌ی (۶) محاسبه می‌شود.

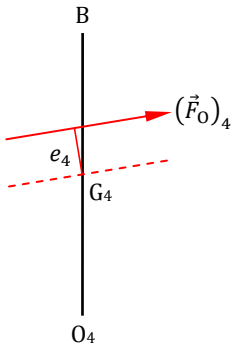
$$I_{G_4} = \frac{1}{12} m (l_4)^2 = 0.233 \ (\text{kg.m}^2) \qquad (۶)$$

در نتیجه نیروی اینرسی عضو ۲ و نیرو و گشتاور اینرسی عضو ۴ مطابق رابطه‌ی (۷) به‌دست می‌آیند. توجه شود چون شتاب زاویه‌ای عضو ۲ صفر است ($\alpha_2 = 0$)، گشتاور اینرسی آن نیز برابر صفر است ($(T_O)_2 = 0$).

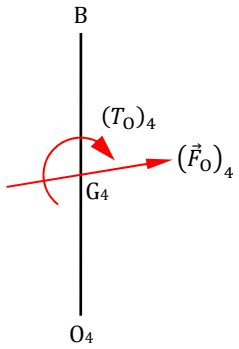
$$\begin{aligned} &(\vec{F}_O)_2 = -m_2 (\vec{a}_G)_2 \quad \therefore \quad |(\vec{F}_O)_2| = 25 \ (\text{N}) \\ &(\vec{F}_O)_4 = -m_4 (\vec{a}_G)_4 \quad \therefore \quad |(\vec{F}_O)_4| = 44 \ (\text{N}) \\ &(T_O)_4 = -I_{G_4} \alpha_4 \quad \therefore \quad (T_O)_4 = 1.35 \ (\text{N.m}) \ \circlearrowright \end{aligned} \qquad (۷)$$

برای تحلیل نیرویی مکانیزم، ابتدا تعادل عضو ۴ بررسی می‌شود. نخست با جابه‌جایی موازی نیروی اینرسی عضو ۴، $(\vec{F}_O)_4$، گشتاور اینرسی آن حذف می‌شود. با توجه به شکل (۴)، کافی است نیروی اینرسی $(\vec{F}_O)_4$ به‌اندازه‌ی e_4 که بر اساس رابطه‌ی (۸) محاسبه می‌شود به‌سمت بالا جابه‌جا شود.

$$e_4 = \frac{(T_O)_4}{|(\vec{F}_O)_4|} = \frac{135 \ (\text{N.cm})}{44 \ (\text{N})} = 3.1 \ (\text{cm}) \qquad (۸)$$



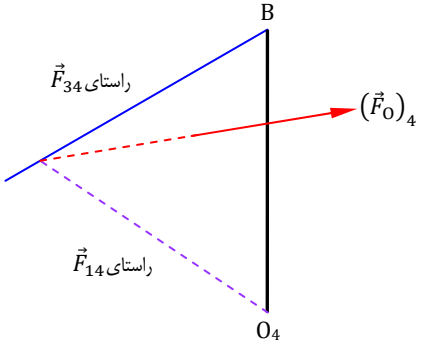
(ب) پس از جابه‌جایی موازی نیروی اینرسی



(الف) پیش از جابه‌جایی موازی نیروی اینرسی

شکل (۴): نمایش حذف گشتاور اینرسی $(T_O)_4$ به‌وسیله‌ی جابه‌جایی موازی مناسب نیروی اینرسی $(\vec{F}_O)_4$

پس از حذف گشتاور اینرسی $(T_O)_4$، با توجه به دو نیرویی بودن عضو ۳، عضو ۴ به یک عضو سه‌نیرویی تبدیل می‌شود. در نتیجه با رسم نیروهای وارد بر آن، چون راستا و نقطه‌ی اثر نیروی اینرسی $(\vec{F}_O)_4$ و نیروی $\vec{F}_{34}$ معلوم هستند، مطابق شکل (۵)، راستای نیروی $\vec{F}_{14}$ به‌دست می‌آید.

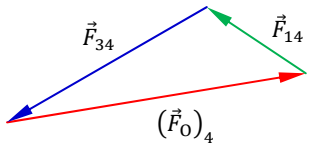


شکل (۵): بررسی تعادل عضو ۴، با توجه به ویژگی سه‌نیرویی بودن آن و تعیین راستای نیروی مجهول $\vec{F}_{14}$

با مشخص شدن راستای نیروی $\vec{F}_{14}$، با استفاده از تعادل نیرویی عضو ۴، که به‌وسیله‌ی رابطه‌ی (۹) بیان می‌شود، اندازه‌ی نیروهای $\vec{F}_{34}$ و $\vec{F}_{14}$ به‌دست می‌آید.

$$(\vec{F}_O)_4 + \vec{F}_{34} + \vec{F}_{14} = \vec{0} \qquad (۹)$$

با استفاده از ترسیمه‌ی رابطه‌ی (۹) که در شکل (۶) رسم شده، مجهول‌های نیرویی مطابق رابطه‌ی (۱۰) به‌دست می‌آیند.



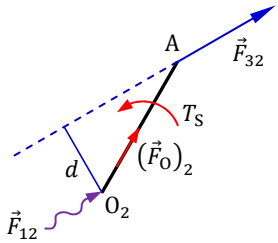
شکل (۶): ترسیمه‌ی نیرویی رابطه‌ی (۹) (مقیاس ترسیمه: هر (cm)۱ در ترسیمه معادل (N)۱۱ است)

$$\begin{aligned} &|\vec{F}_{34}| = 34\ (\mathrm{N}) \\ &|\vec{F}_{14}| = 17\ (\mathrm{N}) \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

پس از محاسبه‌ی بردار نیروی $\vec{F}_{34}$، لازم است با بررسی تعادل عضو ۲، نیروی $\vec{F}_{12}$ و گشتاور مجهول T_S محاسبه شوند. با توجه به دونیرویی بودن عضو ۳، نیروی $\vec{F}_{32}$ از رابطه‌ی به‌دست می‌آید.

$$\vec{F}_{32} = -\vec{F}_{23} = -(-\vec{F}_{43}) = -\vec{F}_{34} \qquad (۱۱)$$

شکل (۷) عضو ۲ را به‌همراه مجموعه‌ی نیروهای وارد بر آن نشان می‌دهد. در اثر این نیروها، عضو ۲ در حال تعادل است.

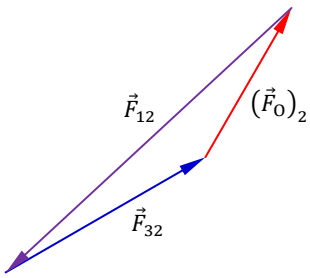


شکل (۷): نمایش عضو ۲ به‌همراه نیروها و گشتاور T_S وارد بر آن

برای تعادل عضو ۲ کافی است معادله‌های (۱۲)برقرار باشند.

$$\begin{aligned} &\sum M_{O_2} = d \times F_{32} - T_S = 0 \\ &\sum \vec{F} = \vec{0} \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

با استفاده از حل معادله‌ی گشتاور (معادله‌ی اول) (۱۲)، گشتاور T_S و با استفاده از حل ترسیمی معادله‌ی نیرویی (معادله‌ی دوم) (۱۲)، بردار نیروی $\vec{F}_{12}$ محاسبه می‌شود. اندازه‌ی d، بازوی گشتاوری نیروی $\vec{F}_{32}$ حول نقطه‌ی A، با استفاده از شکل و با توجه به مقیاس ترسیمه، برابر (cm)۵ به‌دست می‌آید. ترسیمه‌ی معادله‌ی نیرویی (۱۲) در شکل (۸) رسم شده و نتیجه‌ی حل معادله‌های ۱۲ در رابطه‌های (۱۳) نشان داده شده است.



شکل (۸): ترسیمه‌ی نیرویی رابطه‌ی (۱۲) (مقیاس ترسیمه: هر (cm)۱ در ترسیمه معادل (N)۱۱ است)

$$\begin{aligned} &T_S = 1.7\ (\mathrm{N.m}) \\ &|\vec{F}_{12}| = 57\ (\mathrm{N}) \end{aligned} \qquad (۱۳)$$