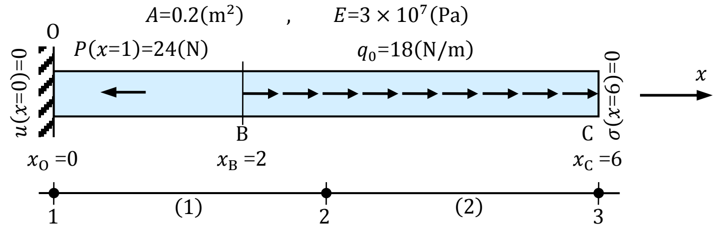
میله‌ی شکل زیر دارای سطح مقطع ثابت A=0.2(m^2) و مدول یانگ E=3 × 10^7(Pa) است. در x=1 نیروی متمرکز P=24(N) و در قسمت BC (2≤x≤6) نیروی گسترده با شدت ثابت q_0=18(N/m) به میله اعمال شده است. شرایط مـرزی در x=0 به‌صورت جابه‌جایی مقید و در x=6 به‌صورت سطح آزاد از تنش است. برای شبکه‌ی نشان داده شده، ابتدا ماتریس‌های سفتی و بردارهای نیرویی هر جزء را به‌دست آورید. سپس با سوار کردن ماتریس‌ها و بردارهای جزءها، دستگاه کلی معادلات اجزای محدود مسأله را تشکیل دهید و سپس آن‌را حل کنید. توجه شود که گره‌ی 2 در وسط میله قرار دارد و طول دو جزء مساوی است. پس از حل دستگاه، تنش در ابتدای میله، $\sigma(x$=0) , جابه‌جایی انتهای آزاد میله، $u(x$=6)، را محاسبه کنید.



شکل (۱): شکل میله‌ی بارگذاری شده و شبکه‌ی اجزای محدود پیشنهادی

پاسخ:

برای حل مسأله به‌روش اجزای محدود لازم است دستگاه معادلات به‌شکل رابطه‌ی (۱) تشکیل شود.

$$\mathbf{K}\,\mathbf{d} = \mathbf{f}_{\text{B.F.}} + \mathbf{f}_{\text{C.F.}} + \mathbf{r} \qquad (۱)$$

هر یک از جمله‌های رابطه‌ی (۱) به‌شرح زیر هستند.

$\mathbf{K}$: ماتریس سفتی کل سازه (برای این مسأله ۳×۳ است)

$\mathbf{d}$: بردار جابه‌جایی گره‌ای برای کل سازه (برای این مسأله ۱×۳ است)

$\mathbf{f}_{\text{C.F.}}$: بردار نیروی خارجی ناشی از نیروی متمرکز در گره‌ها، برای کل سازه (برای این مسأله ۱×۳ است)

$\mathbf{f}_{\text{B.F.}}$: بردار نیروی جزءها، ناشی از بارگذاری (نیروی گسترده یا نیروی متمرکز) در محدوده‌ی جزءها، برای کل سازه (برای این مسأله ۱×۳ است)

$\mathbf{r}$: بردار نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاهی کل سازه (برای این مسأله ۱×۳ است)

بردار جابه‌جایی گره‌ای کل $\mathbf{d}$ و بردار نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاهی $\mathbf{r}$ برای این مسأله با شبکه‌ی پیشنهادی در شکل (۱)، مطابق رابطه‌های (۲) است.

$$\mathbf{d}^{\text{T}} = [\bar{u}_1 = 0 \;,\; u_2 \;,\; u_3]$$
$$\mathbf{r}^{\text{T}} = [r_1 \;,\; 0 \;,\; 0\,] \qquad (۲)$$

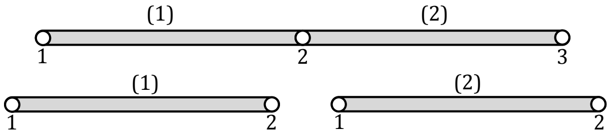
برای تشکیل ماتریس سفتی کل $\mathbf{K}$ و بردار نیروی جزء (المانی) $\mathbf{f}_{\text{B.F.}}$ برای کل سازه، ابتدا باید ماتریس سفتی و بردار نیروی جزءها متناظر برای هر جزء تشکیل شود. سپس با سوار کردن آرایه‌های جزءها، ماتریس سفتی و بردار نیروی $\mathbf{f}_{\text{B.F.}}$ کلی سازه محاسبه شود. توجه شود که برای این مسأله، چون نیروی متمرکز روی گره‌ها وجود ندارد نتیجه می‌شود بردار نیروی خارجی $\mathbf{f}_{\text{C.F.}}$ صفر است.

$$\mathbf{f}_{\text{C.F.}} = \mathbf{0} \qquad (۳)$$

در این مسأله شبکه شامل دو جزء دوگره‌ای است که سطح مقطع و مدول یانگ آن‌ها ثابت و مشابه و طول دو جزء نیز یکسان است. بنابراین ماتریس سفتی دو جزء بر اساس رابطه‌ی (۴) به‌دست می‌آیند.

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{A^{(1)}E^{(1)}}{l^{(1)}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \frac{0.2\times(3\times10^7)}{3}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = 2\times10^6 \begin{array}{c} \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \\ \begin{matrix}(۱) & (۲)\end{matrix}\end{array}\begin{matrix}(۱)\\(۲)\\ \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{A^{(2)}E^{(2)}}{l^{(2)}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \frac{0.2\times(3\times10^7)}{3}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = 2\times10^6 \begin{array}{c} \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \\ \begin{matrix}(۲) & (۳)\end{matrix}\end{array}\begin{matrix}(۲)\\(۳)\\ \end{matrix} \qquad (۴)$$



شکل (۲): شماره‌گذاری محلی و کلی گره‌های جزءهای (۱) و (۲) در شبکه‌ی اجزای محدود شکل شماره‌ی (۱)

توجه شود که در رابطه‌ی (۴)، شماره‌ی سطر و ستون مربوط به هر یک از درایه‌های ماتریس $\mathbf{K}^{(1)}$ و $\mathbf{K}^{(2)}$ که موقعیت آن درایه را در ماتریس سفتی کل سازه بیان می‌کند نیز مشخص شده است. برای این‌کار شماره‌گذاری محلی گره‌های هر یک از دو جزء (۱) و (۲) مطابق شکل (۲) فرض شده است. با توجه به ماتریس‌های سفتی در رابطه‌ی (۴)، ماتریس سفتی کل سازه به‌صورت رابطه‌ی (۵) به‌دست می‌آید.

$$\mathbf{K} = (2\times 10^6)\times\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\ (\mathrm{N/m}) \tag{۵}$$

برای محاسبه‌ی بردارهای نیروی جزء $\mathbf{f}_{\mathrm{B.F.}}^{(1)}$ و $\mathbf{f}_{\mathrm{B.F.}}^{(2)}$، باید توجه شود که برای جزء (۱) علاوه بر نیروی گسترده با شدت ثابت q_0=18(N/m) در محدوده‌ی $2\leq x\leq 3$، نیروی متمرکز P=−24(N) نیز در نقطه‌ی x=1 از این جزء وارد می‌شود. اما برای جزء (۲) تنها نیروی گسترده با شدت ثابت q_0=18(N/m) در کل محدوده‌ی جزء وجود دارد. بنابراین بردارهای نیروی جزء $\mathbf{f}_{\mathrm{B.F.}}^{(1)}$ و $\mathbf{f}_{\mathrm{B.F.}}^{(2)}$ بر اساس رابطه‌های (۶) به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{\mathrm{B.F.}}^{(1)} &= \left(\mathbf{N}^{(1)\,\mathrm{T}}\big|_{x=1}\right)P + \int_{x=2}^{x=3}\mathbf{N}^{(1)\mathrm{T}}\,q_0\,dx\\ \mathbf{f}_{\mathrm{B.F.}}^{(2)} &= \int_{x=3}^{x=6}\mathbf{N}^{(2)\mathrm{T}}\,q_0\,dx\end{aligned} \tag{۶}$$

ماتریس‌های تابع شکل جزءهای (۱) و (۲) مطابق رابطه‌های (۷) تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^{(1)} &= \begin{bmatrix}N_1^{(1)} & N_2^{(1)}\end{bmatrix} = \frac{1}{l^{(1)}}\begin{bmatrix}x_2^{(1)}-x & x-x_1^{(1)}\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}3-x & x\end{bmatrix}\\ \mathbf{N}^{(2)} &= \begin{bmatrix}N_1^{(2)} & N_2^{(2)}\end{bmatrix} = \frac{1}{l^{(2)}}\begin{bmatrix}x_2^{(2)}-x & x-x_1^{(2)}\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}6-x & x-3\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{۷}$$

با جایگذاری ماتریس‌های تابع شکل جزءها از رابطه‌های (۷) در رابطه‌های (۶)، بردارهای نیروی جزء $\mathbf{f}_{\mathrm{B.F.}}^{(1)}$ و $\mathbf{f}_{\mathrm{B.F.}}^{(2)}$ به‌صورت رابطه‌های (۸) به‌دست می آیند.

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{\mathrm{B.F.}}^{(1)} &= \left(\frac{1}{3}\times\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\times(-24)\right)+\left(\frac{1}{3}\times\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{5}{2}\end{bmatrix}\times 18\right) = \begin{bmatrix}-13\\7\end{bmatrix}\ (\mathrm{N})\\ \mathbf{f}_{\mathrm{B.F.}}^{(2)} &= \frac{1}{3}\times\begin{bmatrix}\frac{9}{2}\\ \frac{9}{2}\end{bmatrix}\times 18 = \begin{bmatrix}27\\27\end{bmatrix}\ (\mathrm{N})\end{aligned} \tag{۸}$$

پس از سوار کردن بردارهای $\mathbf{f}_{\mathrm{B.F.}}^{(1)}$ و $\mathbf{f}_{\mathrm{B.F.}}^{(2)}$ بر اساس شماره‌گذاری‌های محلی و کلی شکل (۲)، بردار نیروی $\mathbf{f}_{\mathrm{B.F.}}$ برای کل سازه به‌صورت رابطه‌ی (۹) نتیجه می‌شود.

$$\mathbf{f}_{\mathrm{B.F.}} = \begin{bmatrix}-13\\34\\27\end{bmatrix}\ (\mathrm{N}) \tag{۹}$$

در نهایت دستگاه معادلات اجزای محدود برای این مسأله به‌صورت رابطه‌ی (۱۰) به‌دست می‌آید.

$$(2\times 10^6)\times\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{u}_1=0\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-13\\34\\27\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}r_1\\0\\0\end{bmatrix} \tag{۱۰}$$

با استفاده از حل این دستگاه، مجهول‌های جابه‌جایی u_2 و u_3 و عکس‌العمل تکیه‌گاهی r_1 به‌دست می‌آیند نتیجه‌ی حل در رابطه‌های (۱۱) نشان داده شده است. جابه‌جایی u_3 همان جابه‌جایی مجهول انتهای آزاد میله، $u(x{=}6)$، است.

$$u_2 = 3.05 \times 10^{-5}\ (\text{m})$$
$$u_3 = 4.40 \times 10^{-5}\ (\text{m}) \qquad (۱۱)$$
$$r_1 = -48\ (\text{N})$$

برای رسم میدان جابه‌جایی در میله، باید توجه شود که در این مسأله از جزءهای دوگره‌ای برای شبکه‌بندی استفاده شده است. از آن‌جا که جابه‌جایی در امتداد جزء دوگره‌ای به‌صورت خطی است، نتیجه‌ی حل اجزای محدود برای جابه‌جایی در امتداد میله به‌صورت نمودار شکل (۳) به‌دست می‌آید.

برای محاسبه‌ی تنش در هر جزء، ابتدا کرنش هر جزء بر اساس رابطه‌ی (۱۲) محاسبه می‌شود.

$$\varepsilon^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)}\,\mathbf{d}^{(e)} = \left(\frac{d}{dx}\mathbf{N}^{(e)}\right)\mathbf{d}^{(e)} = \frac{1}{l^{(e)}}[-1 \quad 1]\begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{l^{(e)}} \qquad (۱۲)$$

آن‌گاه با استفاده از رابطه‌ی (۱۳)، تنش در هر جزء محاسبه می‌شود.

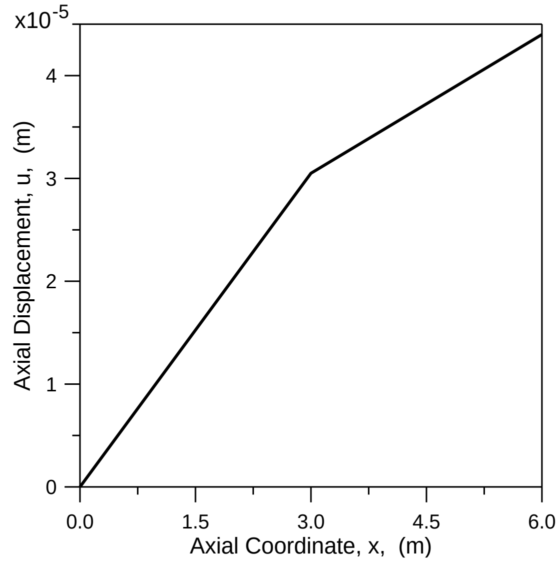
$$\sigma^{(e)} = E^{(e)}\,\varepsilon^{(e)} = E^{(e)}\left(\frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{l^{(e)}}\right) = E^{(e)}\left(\frac{1}{l^{(e)}}\right)[-1 \quad 1]\begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{bmatrix} = E^{(e)}\mathbf{B}^{(e)}\,\mathbf{d}^{(e)} \qquad (۱۳)$$

لازم است تأکید شود که برای محاسبه‌ی تنش با استفاده از تحلیل اجزای محدود، حتماً باید از روند حل اجزای محدود که اساس آن‌را رابطه‌های (۱۲) و (۱۳) تشکیل می‌دهند استفاده شود. به‌عبارت دیگر نباید برای محاسبه‌ی تنش، نیروی محوری را در مقطع مورد نظر محاسبه و سپس بر سطح مقطع میله تقسیم نمود.

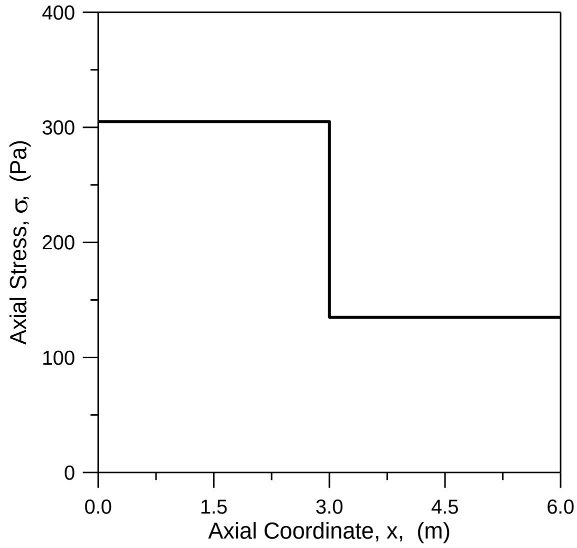
توجه شود که چون جابه‌جایی در امتداد جزء دوگره‌ای به‌صورت خطی تغییر می‌کند، کرنش در امتداد چنین جزیی ثابت خواهد بود. زیرا کرنش از مشتق جابه‌جایی به‌دست می‌آید. در نتیجه تنش نیز در امتداد جزء دوگره‌ای بر اساس حل اجزای محدود، ثابت به‌دست خواهد آمد. برای محاسبه‌ی تنش در ابتدای میله، کافی است تنش در جزء شماره‌ی (۱) محاسبه شود. نتیجه‌ی محاسبه‌ی تنش در جزءهای (۱) و (۲) به‌صورت رابطه‌ی (۱۴) به‌دست می‌آید.

$$\sigma(x=0) = \sigma^{(1)} = E\,\varepsilon^{(1)} = E\left(\frac{u_2^{(1)} - u_1^{(1)}}{l^{(1)}}\right) = E\left(\frac{u_2 - u_1}{l^{(1)}}\right) = E\left(\frac{1}{l^{(1)}}\right)[-1 \quad 1]\begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix} = 305\ (\text{Pa})$$
$$\sigma^{(2)} = E\,\varepsilon^{(2)} = E\left(\frac{u_2^{(2)} - u_1^{(2)}}{l^{(2)}}\right) = E\left(\frac{u_3 - u_2}{l^{(2)}}\right) = E\left(\frac{1}{l^{(2)}}\right)[-1 \quad 1]\begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{bmatrix} = 135\ (\text{Pa}) \qquad (۱۴)$$

توزیع تنش محوری در امتداد میله که از حل اجزای محدود به‌دست آمده، در شکل (۴) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود، همان‌گونه که از حل اجزای محدود با جزء دوگره‌ای انتظار می‌رود، تنش در مرز جزءها ناپیوسته است. هم‌چنین تنش در سرتاسر جزء (۲) از جمله در مقطع x=6 برابر σ=135(Pa) به‌دست آمده که با سطح آزاد از تنش در این مقطع تناقض دارد. این موضوع به‌دلیل تقریبی بودن و خطای ناشی از حل اجزای محدود است.



شکل (۳): توزیع جابه‌جایی محوری در امتداد میله، بر اساس نتیجه‌ی حل اجزای محدود



شکل (٤): توزیع تنش محوری در امتداد میله، بر اساس نتیجه‌ی حل اجزای محدود